

## 『標準 マクロ経済学』（第2版）数学付録

この付録では、本書で用いる数学の公式をまとめています。いずれもマクロ経済学を学ぶ際に非常に役立つ公式なので、本書に限らず、大いに活用してください。以下では各公式についての数値例も示しています。

### (A - 1) 無限等比級数の和

$|x| < 1$  のとき、

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

が成り立つ。あるいは上式は両辺に  $x$  をかけると、

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

と書くこともできる。

#### [A - 1 の例]

$x = \frac{1}{2}$  のとき、

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

となる。

### (A - 2) 連立方程式の解

$x$  と  $y$  に関する連立方程式

$$ax + by = A$$

$$cx + dy = B$$

の解は、

$$x^* = \frac{dA - bB}{ad - bc}, \quad y^* = \frac{aB - cA}{ad - bc}$$

である。ただし， $ad - bc \neq 0$ 。

[A - 2 の例]

$$x + 2y = 5$$

$$3x + 4y = 6$$

のとき，

$$x^* = \frac{4 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} = -\frac{8}{2} = -4, \quad y^* = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} = \frac{9}{2}$$

となる。

(A - 3) 積と商の近似式

$x$  と  $y$  が 0 に十分近いとき，以下の等式が近似的に成り立つ。

$$(1+x)(1+y) = 1+x+y$$

$$\frac{1+x}{1+y} = 1+x-y$$

[A - 3 の例]

$x = 0.02$ ， $y = 0.05$  のとき，

$$(1+0.02)(1+0.05) = 1+0.02+0.05 = 1.07$$

$$\frac{1+0.02}{1+0.05} = 1+0.02-0.05 = 0.97$$

が近似的に成り立つ。

(A - 4) 関数の最大値

1変数関数  $y = f(x)$  は，次の2つの条件が満たされるとき， $x = x^*$  において最大値  $f(x^*)$  をとる。

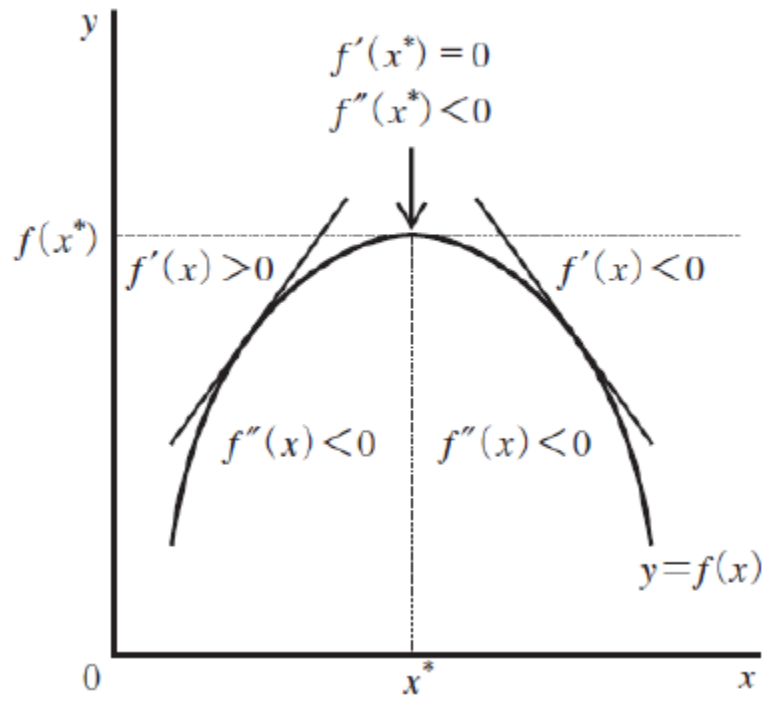
$$(A - 4 - 1) \quad f'(x^*) = 0 \quad (1 \text{ 階の条件})$$

$$(A - 4 - 2) \quad x < x^* \text{ のとき } f'(x) > 0, \quad \text{かつ } x > x^* \text{ のとき } f'(x) < 0$$

なお，常に  $f''(x) < 0$  となる関数  $f(x)$  を凹関数と言う。  $f(x)$  が凹関数ならば，条件 (A - 4 - 2) は必ず満たされるので，最大値を求めるためには1階の条件だ

けを調べればよい。図A-1参照。

### 図A-1 凹関数とその最大値



[A-4の例]

$f(x) = -x^2 + x$  のとき，1階の条件  $f'(x) = -2x + 1 = 0$  より， $x^* = \frac{1}{2}$ 。さらに，

$f''(x) = -2 < 0$  だから  $f(x)$  は凹関数。よって， $f(x)$  は  $x^* = \frac{1}{2}$  のとき最大値

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  をとる。なお， $x < \frac{1}{2}$  のとき  $f'(x) > 0$ ，かつ  $x > \frac{1}{2}$  のとき  $f'(x) < 0$  であ

ることを確認できる。

#### (A-5) 合成関数の微分

1変数関数  $f(g(x))$  を  $x$  で微分するときは，まずそれを  $f(X)$  と  $X = g(x)$  の合成関数と考えると，

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(X)}{dX} \frac{dg(x)}{dx}$$

のように計算する．そしてその後に  $\frac{df(X)}{dX}$  に  $X = g(x)$  を代入する．

**[A - 5 の例]**

$(3x-2)^{10}$  を  $x$  で微分するときには， $(3x-2)^{10}$  を  $f(X) = X^{10}$  と  $X = 3x-2$  の合成関数と考えると，

$$\frac{d}{dx}(3x-2)^{10} = \frac{dX^{10}}{dX} \frac{d(3x-2)}{dx} = 10X^9 \cdot 3 = 30X^9$$

のように計算する．最後に上式の  $X$  に  $X = 3x-2$  を代入すると，

$$\frac{d}{dx}(3x-2)^{10} = 30(3x-2)^9$$

という導関数を得る．

**(A - 6) 関数の積の微分**

1変数関数  $f(x)g(x)$  を  $x$  で微分するときには次のように計算する．

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**[A - 6 の例]**

$x(3x-2)^{10}$  を  $x$  で微分するときには， $f(x) = x$ ， $g(x) = (3x-2)^{10}$  とおくと， $f'(x) = 1$  であり，上の A - 5 の例より  $g'(x) = 30(3x-2)^9$  だから，

$$\frac{d}{dx}x(3x-2)^{10} = 1 \cdot (3x-2)^{10} + x \cdot 30(3x-2)^9 = (3x-2)(3x-2)^9$$

となる．

**(A - 7) 関数の商の微分**

1変数関数  $\frac{f(x)}{g(x)}$  を  $x$  で微分するときには次のように計算する．

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

**[A - 7 の例]**

$\frac{x}{(3x-2)^{10}}$  (ただし  $x \neq \frac{2}{3}$ ) を  $x$  で微分するときには， $f(x) = x$ ， $g(x) = (3x-2)^{10}$

とおくと， $f'(x)=1$ であり，上のA-5の例より $g'(x)=30(3x-2)^9$ だから，

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(3x-2)^{10}} = \frac{1 \cdot (3x-2)^{10} - x \cdot 30(3x-2)^9}{(3x-2)^{20}} = \frac{3x-2-30x}{(3x-2)^{11}} = -\frac{27x+2}{(3x-2)^{11}}$$

となる．

なお，A-7の公式は，A-6の公式において $g(x)$ を $(g(x))^{-1} \left( = \frac{1}{g(x)} \right)$ に置き換えることによって導くこともできる．すなわち，

$$(f(x)(g(x))^{-1})' = f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)[-(g(x))^{-2}]g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

となる．

### (A-8) 平面上のグラフの傾き

2変数関数 $F(x, y)=0$ の $xy$ 平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

となる．ただし， $F_y(x, y) \neq 0$ ．特に $F(x_0, y_0)=0$ を満たす点 $(x_0, y_0)$ における傾きは，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

となる．ただし， $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ．

$n$ 変数関数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ についても同様の関係が成り立つ．すなわち，その $x_i x_j$ 平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i \neq j, \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

となる．ただし， $F_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ．特に $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)=0$ を満たす点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ における傾きは，

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{F_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{F_{x_j}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

となる．ただし， $F_{x_j}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \neq 0$ ．

[A-8の例]

2変数関数  $F(x, y) = x^2 + 2y^3 = 0$  の  $xy$  平面におけるグラフの傾きは，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x}{6y^2} = -\frac{x}{3y^2}$$

となる．ただし  $y \neq 0$ ．特に  $F(4, -2) = 0$  を満たす点  $(4, -2)$  における傾きは，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(4, -2)}{F_y(4, -2)} = -\frac{4}{3(-2)^2} = -\frac{1}{3}$$

となる．

### (A - 9) 変化分の間関係

2変数関数  $F(x, y) = 0$  について， $x$  のわずかな変化分  $dx$  に対する  $y$  の変化分  $dy$  は，

$$dy = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} dx$$

となる．ただし， $F_y(x, y) \neq 0$ ．特に  $F(x_0, y_0) = 0$  を満たす点  $(x_0, y_0)$  の近くにおいては，

$$dy = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} dx$$

が成立する．ただし， $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ．

$n$ 変数関数  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  についても同様の関係が成り立つ．すなわち， $x_i$  のわずかな変化分  $dx_i$  に対する  $x_j$  の変化分  $dx_j$  は，

$$dx_j = -\frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

となる．ただし， $F_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ ．特に  $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$  を満たす点  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  の近くにおいては，

$$dx_j = -\frac{F_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}{F_{x_j}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} dx_i$$

が成立する．ただし， $F_{x_j}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \neq 0$ ．

#### [A - 9 の例]

2変数関数  $F(x, y) = x^2 + 2y^3 = 0$  について， $x$  のわずかな変化分  $dx$  に対する  $y$  の変化分  $dy$  は，

$$dy = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} dx = -\frac{2x}{6y^2} dx = -\frac{x}{3y^2} dx$$

となる。ただし  $y \neq 0$ 。特に  $F(4, -2) = 0$  を満たす点  $(4, -2)$  の近くにおいては、

$$dy = -\frac{F_x(4, -2)}{F_y(4, -2)} dx = -\frac{4}{3(-2)^2} dx = -\frac{1}{3} dx$$

が成立する。

(A - 10) 自然対数  $y = \log x, x > 0$  の性質

(A - 10 - 1) 導関数は  $y' = \frac{1}{x}$  となる。

(A - 10 - 2)  $a > 0, b > 0, c$  に対して次式が成立する。

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

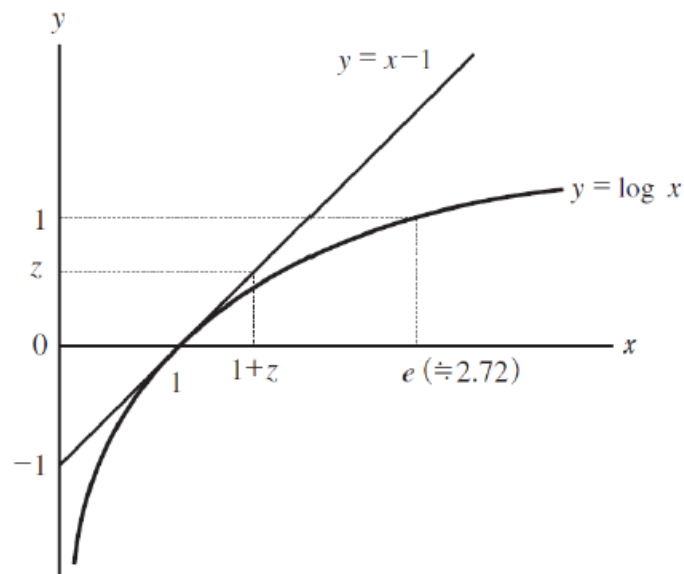
$$\log a^c = c \log a$$

(A - 10 - 3)  $z$  が 0 に十分近いとき近似的に、

$$\log(1+z) = z$$

が成立する。図 A - 2 参照。

図 A-2 自然対数



[A - 10 の例]

自然対数の性質から近似的に，

$$\log 2.72 = 1.00$$

である（図 A - 2 参照）．そうすると，公式（A - 10 - 2）より近似的に，

$$\log (2.72)^2 = 2 \log 2.72 = 2 \times 1.00 = 2.00$$

となる．

公式（A - 10 - 1）より  $y' = \frac{1}{x}$  だから， $y = \log x$  の  $x = \frac{1}{2}, 1, 2$  における接線の

傾きは各々， $2, 1, \frac{1}{2}$  となる．特に  $x = 1$  のとき  $y = \log 1 = 0$  だから， $y = \log x$  のグ

ラフ上の点  $(1, 0)$  における接線の方程式は， $y = x - 1$  となる（図 A - 2 参照）．これは  $x$  が 1 に十分近いときには  $y = \log x$  と  $y = x - 1$  の値がほぼ等しいことを意味する．それら 2 つの方程式で  $x = 1 + z$  とすると公式（A - 10 - 3）が得られる．

この公式より近似的に，

$$\log 1.01 = \log (1 + 0.01) = 0.01$$

$$\log 0.99 = \log (1 - 0.01) = -0.01$$

となる．

さらに公式（A - 10 - 2）より  $\log [(1.01) \times (0.99)] = \log (1.01) + \log (0.99)$  だから， $\log [(1.01) \times (0.99)]$  の値は近似的に，

$$\log [(1.01) \times (0.99)] = \log (1.01) + \log (0.99) = 0.01 - 0.01 = 0.00$$

のように計算できる．同様に， $\log \frac{1.01}{0.99}$  の値も，

$$\log \frac{1.01}{0.99} = \log (1.01) - \log (0.99) = 0.01 + 0.01 = 0.02$$

のように近似的に求めることができる．

以上