行動経済学入門
〈より進んだ内容〉

第４章　リスク選好とプロスペクト理論

〈より進んだ内容１〉くじの期待値が無限大（∞）であることの証明

くじ	ラウンド１	ラウンド２	ラウンド３	…
	→裏	→裏	→裏	
	↘表	↘表	↘表	
	２円	$2^2=4$円	$2^3=8$円	
確率	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$	

$$\text{賞金の期待値}=\frac{1}{2}\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2^3+\cdots$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^3+\cdots$$
$$=1+1+1+\cdots=\infty\text{円}$$

〈より進んだ内容２〉対数型効用関数（$U=\ln w$）を仮定して、くじの期待効用を計算する。ここで、lnは自然対数（底がeの対数; $\log_e$）を表わす。

くじの期待効用

$$\frac{1}{2}u(2)+\left(\frac{1}{2}\right)^2u(2^2)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n u(2^n)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\ln 2^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\ln 2^n+\cdots$$
$$=\ln 2\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot n+\cdots\right)$$

$S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot n+\cdots$とおくと、$S=2S-S$だから

$$\begin{array}{rrl} & 2S= & 1+\left(\frac{1}{2}\right)2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} n+\cdots \\ - & S= & \quad\left(\frac{1}{2}\right)1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n-1)+\cdots \\ \hline \end{array}$$
$$\therefore 2S-S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$$

これは、初項1、公比$\dfrac{1}{2}$の無限等比級数。

ゆえに、$S=1/(1-\dfrac{1}{2})=2$に収束する。

したがって、このくじの期待効用は$\ln 4$。

したがって、このくじを4円より高い値段で買うことはない。

〈より進んだ内容3〉期待効用仮説とはどのようなものか。

今、各状態と、それが起こる確率がそれぞれわかっているとする。

状態　$1, \cdots, n$

くじの賞金がとる値　$x_1, \cdots, x_n$

状態が生じる確率　$p_1, \cdots, p_n$

この時のくじの収入の期待値は　$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$

しかし人はこの期待値では判断していない。人々が判断の基礎に置くのは、効用の期待値である。

効用関数を$u(x)$と書くと、

状態　$1, \cdots, n$

賞金　$x_1, \cdots, x_n$

確率　$p_1, \cdots, p_n$

満足度　$u(x_1), \cdots, u(x_n)$

満足度の数学的期待値＝期待効用だから、

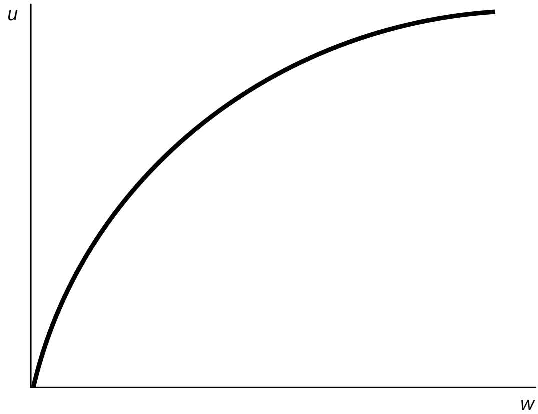
満足度の期待値EUは、

$EU = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n)$

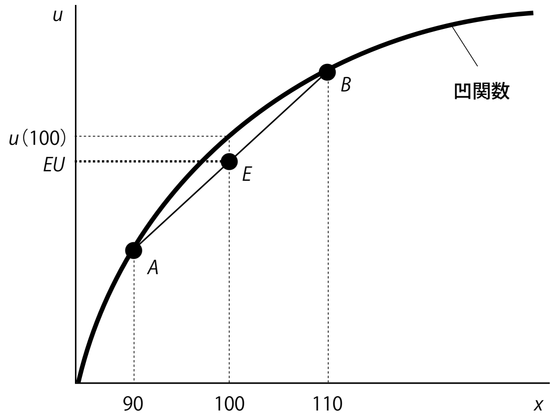
〈より進んだ内容4〉限界効用逓減と危険回避：図による説明

限界効用逓減型の効用関数とは、だんだんと傾きが小さくなっていく関数であるから、図表4−A−1のように、上に凸の関数である。これを凹関数という。今、100の資産を持っている時の効用を$u(100)$と書く。1/2の確率で10の賞金をもらい、1/2の確率で10の支払いをしなければならないくじがあったとする。このくじの賞金の期待値は0である。このくじを持つと、この人の資産は1/2の

図表4−A−1　限界効用が逓減する効用関数



図表4−A−2　危険回避



確率で90、1/2の確率で110となる。この時の期待効用は、それぞれの資産を持った時の効用にその状態が生じる確率をかけて足し合わせたものだから、$1/2u$（90）＋$1/2u$（110）となる。これは図表4−A−2のA点とB点を結ぶ線分の中点Eである。図表4−A−2ではこの時の期待効用の大きさをEUと表している。この中点Eにおける期待効用（EU）は、くじを持たなかった時の効用

$u(100)$ より小さい。このことが効用関数が図表4−A−1や図表4−A−2のように凹関数である限り成立することは、容易に見て取れるだろう。つまり、効用関数が凹関数（限界効用が逓減する）であれば、資産の期待値を変えず不確実性を増すくじを持つと効用が下がるのである。

〈より進んだ内容5〉アレのパラドックスの証明

このくじの選択結果を期待効用仮説に基づいて計算してみよう。

選択1では、くじAがくじBより好まれるので、(1) 式が成り立っている。

$$u(10) > 0.1 \cdot u(25) + 0.89 \cdot u(10) + 0.01 \cdot u(0) \tag{1}$$

一方、選択2では、くじDがくじCより好まれるので、

$$0.1 \cdot u(25) + 0.9 \cdot u(0) > 0.11 \cdot u(10) + 0.89 \cdot u(0)$$

$$\therefore 0.1 \cdot u(25) > 0.11 \cdot u(10) - 0.01 \cdot u(0) \tag{2}$$

(2) 式を (1) 式に代入することで

$$u(10) > 0.11 \cdot u(10) - 0.01 \cdot u(0) + 0.89 \cdot u(10) + 0.01 \cdot u(0)$$

したがって

$$u(10) > u(10)$$

となり、矛盾する。

〈より進んだ内容6〉確実性効果の証明

くじBがくじAより好まれることは、期待効用仮説によると、

$$0.8 \cdot u(4000) + 0.2 \cdot u(0) < u(3000)$$

この両辺に1/4を掛けると、

$$0.2 \cdot u(4000) + 0.05 \cdot u(0) < 0.25 \cdot u(3000)$$

一方、くじCがくじDより好まれることは、

$$0.2 \cdot u(4000) + 0.8 \cdot u(0) > 0.25 \cdot u(3000) + 0.75 \cdot u(0)$$

これは、$0.2 \cdot u(4000) + 0.05 \cdot u(0) > 0.25 \cdot u(3000)$

であるので、上の式と矛盾する。

〈より進んだ内容７〉期待効用仮説とプロスペクト理論

状態は２つだけで、それぞれが起きる確率をpとqと書こう。また、参照点から測った利得または損失を、ここではxとyと書こう。この時、期待効用仮説では、期待効用はそれぞれの状態の効用に確率をかけて足し合わせたものと定義されるから、参照点の資産をwと書くと、期待効用EUは

$$EU = p \cdot u(w + x) + q \cdot u(w + y)$$

と表される。これに対し、プロスペクト理論では、期待効用Vは

$$V = \pi(p) \cdot v(x) + \pi(q) \cdot v(y)$$

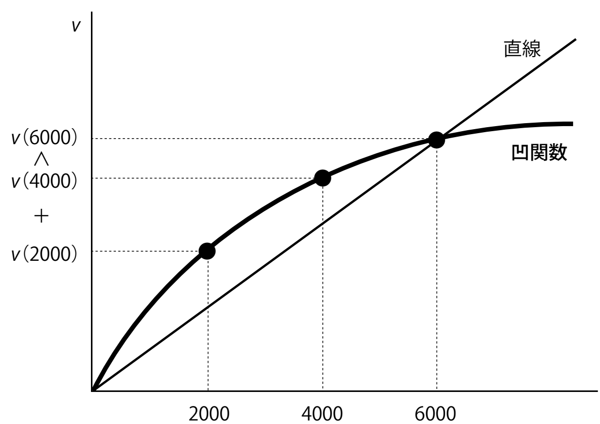
と表される。ここで、$\pi(p)$は客観的な確率がpであった時の主観的確率であり、確率加重関数と呼ばれる。$v(x)$は利得（損失）がxであった時の満足度（効用）であり、価値関数と呼ばれる。効用関数と呼ばないのは、通常の効用関数とは違った性質を持っているからである。

〈より進んだ内容８〉利得局面で価値関数が凹関数であることの説明

客観的確率が０の時、主観的確率も０とすると、くじＢがくじＡより好まれることは、確率加重関数をπで表して、

$$\pi(0.25) \cdot v(6000) < \pi(0.25) \cdot v(4000) + \pi(0.25) \cdot v(2000)$$

図表4−A−3　凹関数の定義



となり、これは、

$$v(6000) < v(4000) + v(2000)$$

となる。図4−A−3に示すように、もし、関数が直線であれば、

$v(6000)$ は $v(4000) + v(2000)$ と等しく、$v(6000)$ の方が小さいことは凹関数であることを意味する。

〈より進んだ内容９〉価値関数の例

トヴェルスキー・カーネマンは1992年に発表した論文で、価値関数として、次のような関数を提案している。これは現在でもしばしば想定される関数である。

$$v(x) = \begin{cases} (x-r)^{\alpha} & if\ x \geq r \quad (x-r)\text{は利得} \\ -\lambda\ (r-x)^{\beta} & if\ x < r \quad (r-x)\text{は損失} \end{cases}$$

x：最終資産, r：参照点の資産

$$\alpha = \beta = 0.88 \quad \lambda = 2.25$$

〈より進んだ内容10〉確率加重関数の例

トヴェルスキー・カーネマン（1992）は次のような関数形を提案している。

$$\pi\ (p) = \frac{p^{\gamma}}{(p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma})^{1/\gamma}}$$

$\gamma = 0.61$（利得）、0.69（損失）

〈より進んだ内容11〉曖昧性回避が期待効用仮説に反することの証明

赤玉が出る確率を p とすると、くじAがくじBより好まれることは、

$$1/3 \cdot u(100) + 2/3 \cdot u(0) \quad > p \cdot u(100) + (1-p) \cdot u(0)$$

$$\therefore \qquad (1/3 - p) \cdot u(100) \quad > (1/3 - p) \cdot u(0)$$

一方、くじDがくじCより好まれることは、

$$(1/3 + 2/3 - p) \cdot u(100) + p \cdot u(0) \ < 2/3 \cdot u(100) + 1/3 \cdot u(0)$$

$$\therefore \qquad (1/3 - p) \cdot u(100) \ < (1/3 - p) \cdot u(0)$$

両者の選好は矛盾する。

第５章　社会的選好

〈より進んだ内容１〉公共財供給実験におけるナッシュ均衡

経済学における均衡とは、いったんその状態になった時、その状態が継続することを言う。ナッシュ均衡とは、ゲーム理論における均衡概念の1つで、ゲームのプレーヤー全員が、自分以外のプレーヤーの戦略を与えられたものとした時、自分の利得を最大にする戦略をとっている状態（全員の戦略の組）と定義される。この時、いったん、ナッシュ均衡の状態になると、誰も進んで自分から自分の戦略を変えようとしないので、その状態（全員の戦略の組）が続くことになる。

ここでは、個人A、個人B、個人C、個人Dの４人のプレーヤーによる公共財供給実験を考える。各プレーヤーには1000円が与えられ、各プレーヤーは投資額を0円から1000円の間で選べるものとする。個人が投資した場合、グループへの投資額の合計は2倍にされたうえで4人に均等に配分される。

本文の第6節で示したように、個人Aの利得は、

1000 − 0.5 ×個人Aの投資額（x_A）＋0.5 ×個人B、C、Dのグループへの投資額合計

となる。したがって、B、C、Dの投資額を所与とすると、個人Aの利得を最大にするには投資額を0にすればいい。同じようにして、個人Bの利得は、

1000 − 0.5 ×個人Bの投資額（x_B）＋0.5 ×個人A、C、Dのグループへの投資額合計

となるので、これを最大にするには、Bの投資額も0にすればいい。同様のことがCとDについても成立するので、4人がそれぞれ、投資額を0とした状態がナッシュ均衡である。

今、4人全員が「0円投資」を選んだ状態にあるとしよう。ここで、個人Aは自分の投資を「0円」から増やさないだろう。なぜなら、投資を増やすことによって、個人Aの賞金額は減ってしまうからである。同様のことは、個人B、個人C、個人Dについても言える。したがって、一度全員が「0円投資」の状

態になったら、誰一人としてその状態から行動を逸脱しようとする誘因（インセンティブ）を持たない。他人の行動を所与とした時に、誰一人として自分の行動を逸脱しようとしないので、この状態は、ナッシュ均衡である。

〈より進んだ内容２〉不平等回避性

Fehr and Schmidt（1999）では、個人iの利得額をx_i, 個人jの利得額をx_jとした時、個人iの効用は、

個人iの利得額が個人jの利得額より小さい時（$x_i - x_j < 0$）

$$u_i(x_i) = x_i - \alpha_i(x_j - x_i)$$

個人iの利得額が個人jの利得額より大きい時（$x_i - x_j > 0$）、

$$u_i(x_i) = x_i - \beta_i(x_i - x_j)$$

として表される。ただし、α_i, β_iは正のパラメータである。$x_j - x_i > 0$ならば、個人iにとって相手の利得が自分の利得よりも大きい不平等（羨望, envy）を表している。また、$x_i - x_j > 0$ならば、個人iにとって自分の利得が相手の利得よりも大きい不平等（罪悪感, guilt）を表している。ここで$\alpha_i > \beta_i$と想定すれば、自分の利得が相手の利得よりも大きい不平等による不効用よりも相手の利得が自分の利得よりも大きい不平等による不効用の方が大きいと想定することができる。

ここで、不平等性回避の効用関数を持つ個人が独裁者ゲームをプレーした場合、どのような行動を選ぶか考えてみよう（E. Cartwright（2011）*Behavioral Economics,* Oxon: Routledge, p.283）。

●独裁者ゲーム

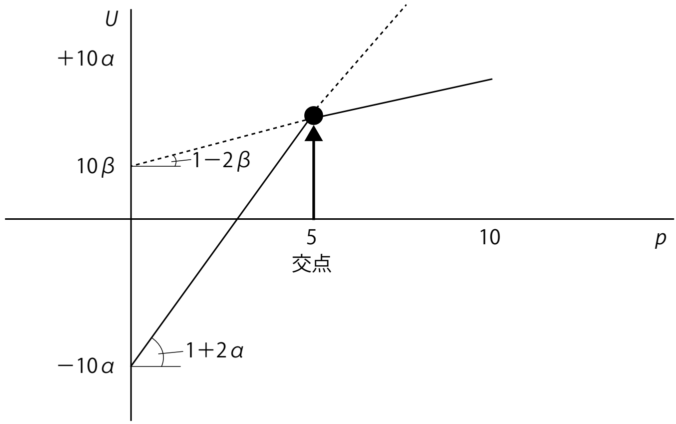
初めに10ポイントが与えられ、配分者がpポイントを手元に置き、$10 - p$ポイントを配分したとしよう。

pが5ポイントより小さければ、配分者の利得は受益者の利得より小さいので、配分者の効用Uは、

$$U = p - \alpha((10 - p) - p) = p - \alpha(10 - 2p)$$

であり、pが5ポイントより大きければ、配分者の利得は受益者の利得より大

図表5-A-1　配分者の効用曲線（$\beta \leq 0.5$の時）



きいので、配分者の効用Uは、

$$U = p - \beta\,(p - (10 - p)) = p - \beta\,(2p - 10)$$

となる。問題は、この時、配分者はpをいくらにすれば、効用Uが最大になるかである。これを解くために、先の2式をUとpの関数のグラフに描いてみよう。

まず、$p \leq 5$の時は、

$$U = p - \alpha\,(10 - 2p) = (1 + 2\,\alpha)\,p - 10\,\alpha$$

であるので、縦軸をU、横軸をpとすると、切片が$-10\,\alpha$、傾きが$1 + 2\,\alpha$の直線である。

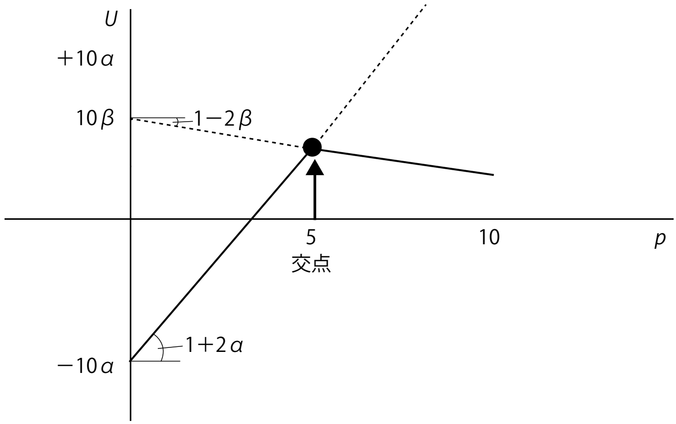
一方、$p \geq 5$の領域では、$U = p - \beta\,(2p - 10) = (1 - 2\,\beta)\,p + 10\,\beta$

であるので、切片が$10\,\beta$、傾きが$1 - 2\,\beta$の直線である。

この2本の直線を図に描きたいが、$1 - 2\,\beta$はβが0.5より小さい時は正になるが、大きい時は負になり、図が大きく違ってくる。そこで、まず、βが0.5より小さく、この直線の傾きが正の場合の図を図表5-A-1に示そう（両直線の交点は$p = 5$の時となることを各自計算で確かめよ）。

この図からわかるように、効用は右に行くほど、つまり、pが大きいほど大

図表5-A-2　配分者の効用曲線（β >0.5の時）



きくなるので$p = 10$が効用を最大にする点である。

一方、βが0.5より大きく、この直線の傾きが負の場合の図を図表5-A-2に示そう。

図表5-A-2から明らかなように、効用は、両直線の交点（$p = 5$）で最大になる。

両方の解を合わせると、配分者は、βが小さい場合、つまり、自分の利得が相手の利得よりも大きい場合に感じる罪悪感が小さい場合には、全額を自分のものとする。逆にβが大きく、罪悪感を強く感じる配分者は、半分を受益者に配分する。これが、不平等回避モデルが予想する、独裁者ゲームの最適行動である。実際の実験結果をある程度説明するものと言えよう。

●最後通牒ゲーム

次に、最後通牒ゲームで、受益者が拒否するか、受け入れるかが不平等回避の程度に依存することを示そう（E. Cartwright（2011）*Behavioral Economics,* Oxon: Routledge, p.283）。

独裁者ゲームの時と同様、初めに10ポイントが与えられ、配分者がpポイン

トを手元に置き、$10-p$ ポイントを配分したとしよう。まず、配分者が半分（5ポイント）以上を取り上げた場合を考えよう。つまり、$p>10-p$。この時の受益者の効用は、配分を受け入れた時、

$$10-p-\alpha\,(p-(10-p))=(10-p)-\alpha\,(2p-10)$$

拒否した時、0である。

したがって、受け入れの条件は、

$$10-p-\alpha\,(2p-10)>0$$

$$10-p>\alpha\,(2p-10)=2\,\alpha\,p-10\,\alpha$$

$$(1+2\,\alpha)\,p<10+10\,\alpha=10\,(1+\alpha)$$

$$\rightarrow p<10\frac{1+\alpha}{1+2\,\alpha}$$

受け入れるか拒否するかは α に依存するが、例えば、$\alpha=1$ であれば、配分者が全体の2/3以下をとり、1/3以上を配分するのであれば、受益者は受け入れる。利己的個人は $\alpha=0$ であるから、配分者がほんのわずかでも配分してくれれば受け入れる。不平等回避がとても強い人は α がたいへん大きい場合であり、半々に配分されなければ受け入れない。

配分者が半分以上を配分する場合を考えよう。つまり、$p<10-p$。この時の受益者の効用は、配分を受け入れた時、

$$10-p-\beta\,((10-p)-p)$$

拒否した時、0である。

したがって、受け入れの条件は、

$$10-p-\beta\,((10-p)-p)>0$$

$$10-p>\beta\,((10-p)-p)=10\,\beta-2p\,\beta$$

$$p-2p\,\beta<10-10\,\beta$$

$$p\,(1-2\,\beta)<10\,(1-\beta)$$

$$p<10\frac{1-\beta}{1-2\,\beta}$$

β は正だから、$\dfrac{1-\beta}{1-2\,\beta}$ は1より大きく、一方 p は5以下だから、この不等式

はいつでも成立する。すなわち、受益者は半分以上を配分されて、拒否することはない。まあ、これは当然満たされなければ困る条件ではあるが。

第８章　幸福の経済学

〈より進んだ内容１〉回帰分析

身長が高い人は体重が重い傾向があるだろうと思われる。これを確かめるにはどうしたらよいだろうか。まず、身長と体重を測定してデータを集める必要がある。一例として、図表8‒A‒1に、年齢別の平均データを示す。身長を縦軸に、体重を横軸にとった散布図を描いたのが図表8‒A‒2である。確かに、右上がりの傾向があるように見えるが、それを厳密に確認する方法が回帰分析である（ただし、変数が2つの場合には相関係数を計算しても同じことを確認できる）。

回帰とは、散布図の点に最もフィットするように直線を引くことである。そのためには、その直線（回帰直線という）からの誤差を1人1人について求め、その値を2乗して全員分を足し合わせた値が最小になるように線を引けばよい。回帰直線は、体重＝$a+b\times$身長と表されるが、このaは縦軸との切片であり、bは直線の傾きである。この傾きが正であれば、身長が高いほど体重が重いことを意味する。図表8‒A‒1のデータで計算（推定という）すると、bは0.76と正であることがわかる。

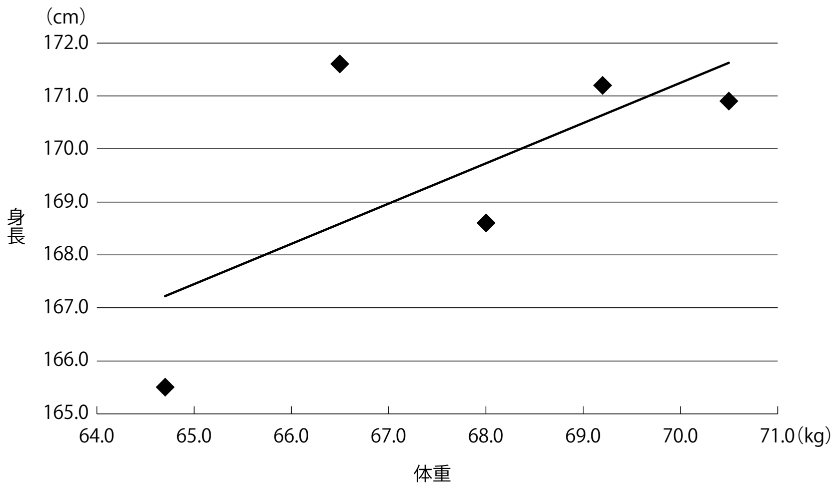
〈より進んだ内容２〉統計的に有意

男性100人の幸福度の平均値が6.27であり、女性100人の幸福度の平均値が

図表8‒A‒1　年齢別の身長・体重データ

年齢（歳）	身長（cm）	体重（kg）
20 〜 29	171.6	66.5
30 〜 39	171.2	69.2
40 〜 49	170.9	70.5
50 〜 59	168.6	68.0
60 〜 69	165.5	64.7

図表8-A-2　身長・体重の散布図と回帰直線



6.51であった場合、この結果だけで、「一般に、女性の方が男性よりも幸福である」と言ってもいいだろうか？

確かに女性の方が点数は高いが、それは全世界の人間のうち、今回の調査では“たまたま”女性の上位100人が選ばれ、男性では“たまたま”下位100人が選ばれているだけかもしれない。つまり、もう一度別の100人ずつを調べたら、男性グループの100人の方が平均の幸福度が高くなるかもしれない。それでは、どのようにして「女性の方が幸福」または「男性の方が幸福」という結論を導くことができるのだろうか？　いったい、どのくらいの差があればいいのだろうか？

今回のサンプルで見られた差は「たまたま」ではない、ということを言うために「統計的仮説検定」を行う。これによって、「サンプル以外のところ（母集団）では本当は差はないのに、サンプルの選び方が原因で、偶然にも差があるように見えてしまっている確率」を求めることができる（p値という）。したがって、この確率が小さければ、「偶然生じた差ではない」と言うことができ、「一般に女性の方が幸福である」と言うことができる。

「この確率が小さければ」と述べたが、大きいか小さいかを判断するためには何らかの基準を設けておく必要がある。通常はこの数値が5%以下（0.05以下）の場合に「偶然ではない差があった＝有意差があった」とみなす。この時、この基準となった％のことを「有意水準」という。本文の場合は、男女の幸福は数値的にはわずかな差のように見えるが、統計的には断然有意な差であった。

〈より進んだ内容３〉喫煙と男女の幸福度

本文中の「喫煙が男性が不幸である原因である」という結論を、回帰分析から導くことができる。著者が、幸福度を、男性を表すダミー変数を含む数多くの属性などの変数に回帰すると、男女の幸福度の差（男性ダミー変数の係数）は有意でなかった（大竹文雄・白石小百合・筒井義郎『日本の幸福度――格差・労働・家族』日本評論社、2010年、第2章参照)。このことは、説明変数に採用してコントロールしている1つあるいはいくつかの属性によって、男女の幸福感の差がもたらされていることを示唆している。その変数を探すと、それは喫煙の変数であった。喫煙変数を入れると男女の差は有意でないが、喫煙変数を除外すると、有意な男女差が現れるのである。つまり、喫煙の条件を男女で同じにすると、男女の幸福度に差はない。

〈より進んだ内容４〉パネル回帰分析

より一般的には、主観的な幸福感は、変化しない恒常的な部分と、人生の出来事による一時的な部分に分けられるだろう。この、恒常的部分のうち生年に依存する部分を世代効果と呼び、一時的な部分のうち生まれてからの年数に依存する部分を年齢効果と呼ぶ。パネルデータでは、その人の恒常的な部分を「固定効果」として推定することができる。つまり、人々のその時々の幸福感を、個人ごとのダミー変数（固定効果）と、それぞれの人のその時々の年齢の変数に回帰すれば、後者（年齢ダミー）の係数は年齢効果を、個人ダミー変数の係数は世代効果を表す。