レヴィット　ミクロ経済学（発展編）

補論：数学の復習

セクション1：数学の概念と基本的なスキル

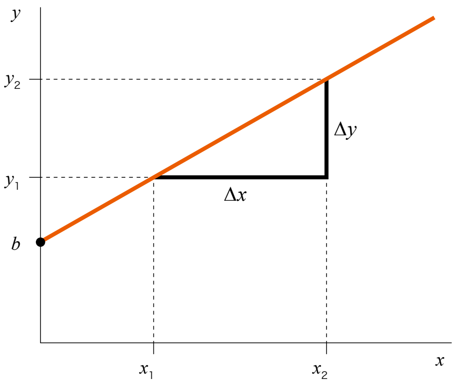
経済学が「考え方」に関する学問であるのは間違いない．経済学の考え方は，さまざまな「言語」で伝えられる．本文では，言葉による説明と代数の等式や図を使った説明を行い，随所に収めた補論では第三の言語の微分を活用した．

経済学的な考え方を表現し，理解するには，言葉よりも数学記号を活用したほうが簡単な場合がある．この補論では，本文で活用した代数や幾何学的な概念と，補論で活用した微分を復習しておこう．ほとんどの概念や手法は，高校や大学の代数や微分の授業で学んだことがあると思うが，ここでは経済学を学ぶのに役立つ形で提示するつもりだ．まず，直線と曲線を取り上げる．効用や所得といった経済学の主要な概念を理解にするのにきわめて重要であり，この復習の補論の基礎になるものである．

直線と曲線　投入変数と産出の関係を記述した関数は，一般に$y = f(x)$といった形を取る．xは投入，yは産出である．経済学を学ぶのにとくに重要な関数は直線の関数で，一般に$y = mx + b$の形で記述される．x−y平面（デカルト平面）上にグラフ化すると，図A.1になる．汎用関数では，xは投入，yは産出である．

この直線の関数の形から多くを学ぶことができる．この関数は傾き−切片型と呼ばれるが，その理由はすぐにあきらかになる．直線の傾きmは，xが変化したときのyの変化を表し，数式では以下のように記述することができる．

図A.1　直線の傾きと切片



$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ここで，Δは変数の変化を表し，(x_1, y_1) と (x_2, y_2) は直線上の２点である．

傾きは，直線に関する重要な情報を２つ伝えている．１つは，直線の傾きが緩やかかきついか．言い換えれば，x が１単位変化すれば，y がどれだけ変化するか，という問いに答えることができる．傾きをみれば，x と y の関係がプラスかマイナスかもわかる．図A.1のように右上がりの直線は，傾きがプラスであり，x が増えれば y も増える．傾きがマイナスなら，x が増えれば y が減り，右下がりの直線になる．平らな水平の線は，傾きが０であり，x が変化しても y は変化しない．垂直の線上では，y が増えても減っても x は変化しない．そのため，垂直の線の傾きは――無限とおなじことだが――定義できない，とされる．

$y=mx+b$ の形が，直線に関して伝えている情報がもう１つある．b が y 軸の切片であるということだ．これは図A.1で明確に確認できる．直線が y 軸と交差する点が b である．このケースでは，y 軸の切片はプラスだが，直線がマイナスの切片を持つ場合もあり，y 軸の切片が x 軸を下回るか０になる．[1)]

直線を傾き−切片型を使った等式で説明してきたが，直線は，投入 x と産

出 y の関係を表す形で説明することもできる．直線の標準型として記述された，$mx - y = -b$，あるいは $x = \dfrac{(y-b)}{m}$ を目にしたことがあるはずだ．これは，需要関数，供給関数の一般的な形であり，経済学を学ぶ過程で頻繁に登場する．

定義上，直線の傾きは一定であり，x と y の変化をどこで測っても，傾きは同じになる．だが，x と y の関係はもっと複雑にもなりうる．直線と違って曲線の場合，どこで測るかで傾きが変わる．曲線の形と曲率はほぼ無限なので，曲線の関数の標準型といったものはない．

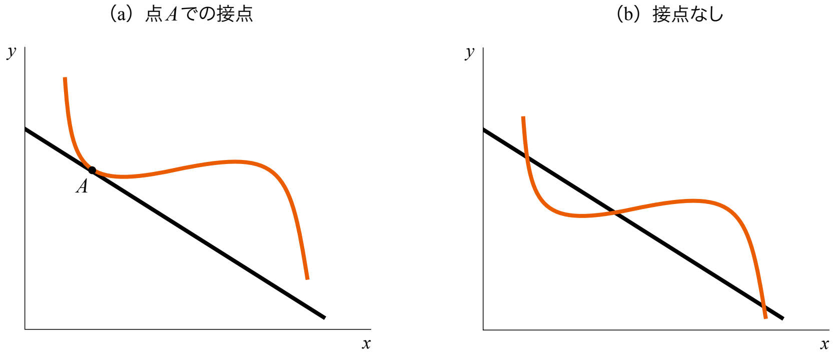
接点　直線と曲線が，交差したり重なり合ったりすることなく接する点が接点である．直線の傾きが，曲線上のある点の傾きと等しい点を表している．利潤や効用の最大化など接線条件で最適化問題が解けることから，ミクロ経済学を学ぶうえで，この接点の概念はきわめて有用である．

図に示せば接点がすぐわかる．図A.2のパネルaの点 A が，曲線と直線の接点である．これが接点だとどうして言えるのだろうか．点 A では，曲線が直線にふれるだけで，交差していない．このケースでは，曲線の傾きと直線の傾きが等しくなるのは，この点だけであり，したがって，直線の接点だといえる．

すべての直線が曲線の接線になるわけではない．パネルbには，曲線と直線が交差しているが，接点を持たない例を描いた．

1）　中級ミクロ経済学ではあまり目にすることはないが，y 軸の切片がない直線もある．直線が垂直の場合である．垂直の直線は，切片が y 軸上のすべての点（直線が y 軸と重なり，$x = 0$）か，もっと一般的なのは，y 軸とはまったく交差しないかどちらかである（たとえば，$x = 2$ または $x = -4$ など）．

図A.2 接点



A.1 解いてみよう

直線の傾きは－2，切片は10である．

a.　直線を傾き−切片型で表せ．

b.　デカルト平面上に直線を描け．

c.　直線に接する曲線を描け．

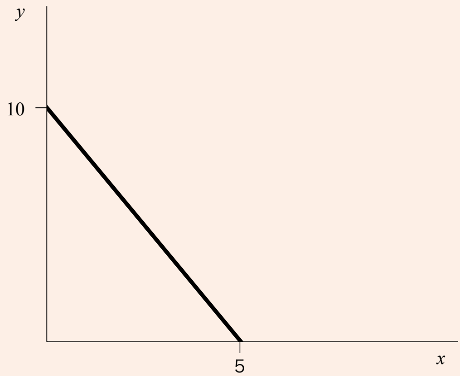
解答：

a.　直線の傾き−切片型は，mは傾き，bを切片として，$y=mx+b$で表される．$m=-2$，$b=10$に対応しているので，$y=-2x+10$である．

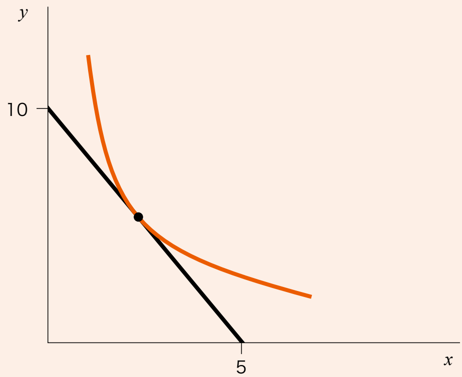
b.　$y=-2x+10$の等式をデカルト平面上に描くには，x軸，y軸の切片を計算し，これらの点を結べばいい．等式は傾き−切片型なので，y軸の切片は（0, 10）になることがわかっている．（これを解くもう1つの方法は，$x=0$を直線の等式に代入する．$x=0$のとき，$y=-2\times 0+10=10$となる．）

　x軸の切片を求めるには，$y=0$を直線の等式に代入する．$0=-2x+10$．これを変形すると，$2x=10$で，$x=5$となる．したがって，（5, 0）が直線上のもう1つの点であることがわかる．つぎに，これ

らの点を結んで，x–y 平面に直線を描けばいい．



c. 直線 $y = -2x + 10$ に接する曲線には，下図のようなものがある．この例では，接点は，この問題の前半にグラフにした直線上の1点にしかないことに留意が必要だ．この接点以外にも，この直線と接点を持つ曲線を描くことがある．



セクション2：微分の復習

以上の基本的な代数の概念は，本書全体をとおして活用してきた．今度は，本書の各補論で使った微分を復習して経済学的な概念への理解を深めよう．これまでに微分のコースを受講したことがあるなら，このセクションは

純粋な復習になる．微分を学んだことがないなら，多少のコツはつかめるかもしれない．ただ，このセクションは，微分の基礎の代わりになるものではない．微分を経済学に応用したいのであれば，微分の入門コースでしっかりと基礎を固めてからスタートするのが肝要だ．

1 次導関数　経済学を学ぶうえで，傾きがきわめて重要なことはすでにみた．$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ の公式を使って直線の傾きを求めることができる．直線と違って曲線では，どこで測るかで傾きが変わってくるので，曲線の傾きはこの公式では表現できない．そこで役立つのが微分である．

とくに，微分，あるいは任意の点での関数の変化率を使って，曲線（または直線）の傾きを記述することができる．関数 $y = f(x)$ を例に取ろう．微分はつぎの等式で表せる．

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

1 次導関数は，以下の微分の基本的な公式を使って簡単に解くことができる．ここで示すルールが，微分の公式を網羅しているわけではまったくない．だからこそ，微分の教科書を参照してもらいたい．だが，ここで取り上げるルールは，補論の微分の基本であり，今後も経済学で頻繁に登場するはずだ．

定数の微分：$f(x) = c$ で，c は定数である．このとき，$\dfrac{df(x)}{dx} = 0$ である．なぜか．この等式の直線は $y = c$ で水平であることがわかっている．水平の直線の傾きは 0 なので，その導関数も 0 でなければならない．

微分の基本公式：おそらく，もっとも頼りになるのが，この公式だ．関数 $f(x) = cx^{\alpha}$ で，c は定数である．これを微分すると，$\dfrac{df(x)}{dx} = c\alpha x^{\alpha - 1}$ となる．言葉で説明すると，微分するには，x の指数を x にかけ，x の指数を 1 つ減らす．具体例で考えれば，よくわかるだろう．$f(x) = 3x^4$ の微分は，

$\dfrac{df(x)}{dx} = 3 \times 4x^{4-1} = 12x^3$ である．

微分の足し算と引き算：以上のルールを使って，$f(x) = g(x) + h(x)$ の導関数を求めることができる．$\dfrac{df(x)}{dx}$ を解くには，単純に $g(x)$ と $h(x)$ を別個に微分すればいい．すなわち，

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

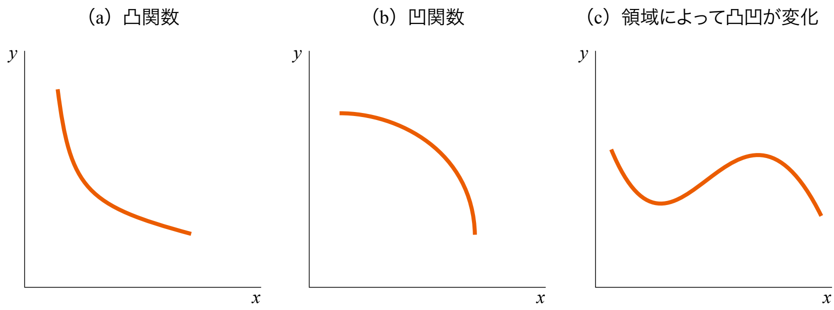
前と同じように，簡単な例で見てみよう．$f(x) = x^2 + 10$ を微分すると，$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d(x^2)}{dx} + \dfrac{d(10)}{dx} = 2x + 0 = 2x$ である．

このルールは足し算でも引き算でもあてはまる点に留意したい．引き算はマイナスを足しているだけだからだ．言い換えれば，$f(x) = g(x) - h(x)$，$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dg(x)}{dx} - \dfrac{dh(x)}{dx}$ である．

2次導関数　関数の導関数はわかったが，導関数の導関数，つまり2次導関数を求めなければならない場合がある．

2次導関数は，関数に関して何を伝えているのだろうか．1次導関数が関数の傾きを表しているのに対して，2次導関数は関数の曲率を表している．関数の曲率には，（図A.3のパネルaのように）下に凸か，（パネルbのように）下に凹があるが，x がある値までは凸で，それ以上の値では凹になる，パネルcのような関数もある．

図A.3　凸と凹



ある範囲の x に関し，x について 2 次導関数が 0 より大きい場合，曲線は下に凸であるともいえる．

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0.$$

また

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$$

である場合は，曲線が下に凹である．

以上の 2 つのルールは，やや曖昧に思えるかもしれないが，その背後の論理は明確である．まず，関数の 1 次導関数の意味について考えてみよう．プラス（あるいはマイナス）の 1 次導関数は，関数がその領域で増加している（あるいは減少している）ことを示している．だとすると同様に，2 次導関数は，1 次導関数で測った傾きが，その領域で大きくなるか，小さくなるかを示していることになる．プラスの 2 次導関数は，x の値が大きくなるにつれて傾きが増加し（パネル a），これを下に凸と呼び，マイナスの 2 次導関数は，x の値が大きくなるにつれて傾きが減少し（パネル b），これを下に凹と呼ぶ．[2)]

2）　パネル a では，右に行くほどマイナスが小さくなり，傾きが増加している点に留意したい．同様に，パネル b では，右に行くほどマイナス幅が大きくなり，傾きが減少している．

偏導関数　以上では，変数が1つの等式の1次導関数と2次導関数をみた．だが，変数が2つ以上の等式の傾きや曲率を求めなければならない場合がある．この場合は偏導関数を使う．

関数 $z = f(x, y)$ について考えよう．投入物 x および y を関数に投入し産出 z が求められる．この関数を前提に，2つの1次偏導関数を求めることができる．x についての z の1次導関数，$f_x(x, y) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$，$y$ についての z の1次導関数 $f_y(x, y) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ である．

標準的な導関数の計算方法がわかっていれば，偏導関数の計算はじつはとても簡単である．$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ を求めるには，単純に y を一定として，x について $f(x, y)$ の1次導関数を求めればいい．$f(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ の標準的なコブ゠ダグラス型の等式[3]で，これを示そう．微分の基本公式を用いて，以下が得られる．

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}$$

同様に，

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (1-\alpha)\,x^{\alpha}y^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)\,x^{\alpha}y^{-\alpha}$$

これらの偏導関数は，傾き（あるいは関数の変化率）を x と y のそれぞれの方向に分離する．変数が複数の関数の曲率を説明するには，どうすればいいのだろうか．それには，2次偏導関数を使う．舌を噛みそうだが，標準的

---

3)　経済学を学んでいると，頻繁に登場するのがコブ゠ダグラス型関数であり，効用関数や生産関数など，さまざまな経済学の概念に共通する関数の1つである．その特性についてここでは詳しくは述べないが，共通の関数に応用できる基本的な微分のテクニックを学んでおくことは有益である．微分の補論では，経済学の問題を解くという目的に鑑みて，$0 < \alpha < 1$ と想定している．だが，1次偏導関数，2次偏導関数を解くのに，この想定が必要なわけではないので，そういう想定にはしていない．指数の α はプラスにもマイナスにもなりうるし，分数にも整数にもなりうるが，この公式があてはまる．

な2次導関数にくらべ2次偏導関数について考えるほうが簡単だ．2次偏導関数は偏導関数の偏導関数で，標準的な2次導関数が標準的な導関数の標準的な導関数であるのと同じである．関数$z=f(x,y)$について，求めたいのは，2方向の曲率である．

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

上記のコブ＝ダグラス関数を使って，以下が得られる．

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\alpha(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha-1}$$

じつは，このケースでは，別のタイプの2次偏導関数がある．交差偏導関数といわれるが，xについての1次偏導関数とyについての2次偏導関数，あるいはyについての1次偏導関数とxについての2次偏導関数を計算する．すなわち，

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

こうした交差偏導関数を知っておくと役に立つが，本書の分析では使っていない．

本書で使う偏導関数は，全微分である．全微分で，関数の総変化，xとyの両方向の変化を合わせたものがわかる．これは経済学を学んでいると，よくお目にかかる．基礎編の第6章で出てきた，資本Kと労働Lの投入のように，2つの変数が同時に変化するときの曲線上の動きを説明しなければならない場合がある．複数の変数を持つ関数を全微分するには，以下を解く．

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

これを分解して，等式の各項が何を意味しているのかを考えよう．２つの偏導関数 $\left(\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right.$ と $\left.\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$ は，それぞれ x 方向，y 方向への変化率を表している．同様に，dx，dy は x と y の変化を表す．前述の等式と同様に，これらを合わせると，すべての変数についての関数の総変化がわかる．

制約条件なしの最適化問題　さまざまな点で，この数学の復習で構築してきたのは，最後に取り上げる数学的概念――基本の，あるいは制約条件なしの最適化問題のためである（制約付き最適化問題を考えるには，第４章の補論を参照）．最適化問題を解くには，ここまで学んできた微分の手法を使う．

$y = f(x)$ の関数からみていこう．まず，いわゆる１階条件を解く．そのためには，１次導関数が０に等しいとおく．すなわち，

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

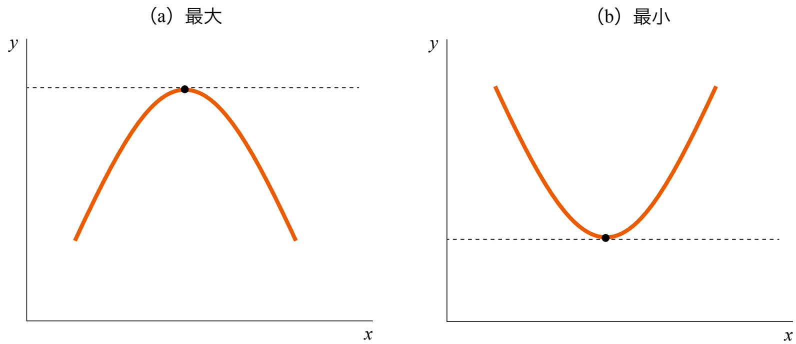
これは何を意味しているのだろうか．思い出して欲しいのは，$\dfrac{df(x)}{dx}$ が関数 $f(x)$ の傾きだということだ．その例は図A.4に示した．傾きが０のとき，曲線に接する接線は水平になる．これは，曲線が最大値にあるか（パネルa）か，最小値にあるか（パネルb）のどちらかだということだ．

１階条件で得られたのが最大値なのか最小値なのかは，じつはわからない．極値を求めた，ということだ．関数を最大化したのか最小化したのかを知るには，導関数について２つめに学んだ２次導関数に戻らなくてはならない．具体的には，関数の２次導関数を求め，プラスになるかマイナスになるかを確かめる．

$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$ のとき，曲線は下に凹であり，点は最大値である．

$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ のとき，曲線は下に凸であり，点は最小値である．

図A.4 最適性



A.2 解いてみよう

変数が 1 つの関数 $y = 5x^2 - 100x$ を最適化し，2 次導関数を使って最大値か最小値かを求めよ．

解答：

まず 1 次導関数が 0 と等しいとおいて，1 階条件を求める．このケースでは，

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(5x^2 - 100x)}{dx} = 5(2)x^{2-1} - 100 = 10x - 100 = 0$$

x を解いて最適値を求める．

$$10x - 100 = 0$$

$$x = 10$$

繰り返しになるが，1 階条件は，関数を最適化したことを示しているだけだ．最大値か最小値かを知るには，2 次導関数を求める．すなわち，

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d(10x - 100)}{dx} = 10 > 0$$

$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$ なので，これは最小値である．